ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1981

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des séries à termes réels. A toute série $a \in \mathcal{S}$, de terme général a_n $(n \in \mathbb{N})$, on associe les sommes partielles $s_n(a) = \sum_{p=0}^{n} a_p$, ainsi que d'autres sommes, qui seront définies dans les parties I et II.

I

A partir de la suite $(s_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, notée aussi $(s_n^{(0)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$, on définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ les suites $(s_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_n^{(k+1)}(a) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} s_p^{(k)}(a)$. Si la suite $(s_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, on dit que sa limite est la somme d'*indice* k de la série a, et on appelle $\mathcal{S}_k$ la partie de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette hypothèse est réalisée.

1 - Montrer que si la série a est convergente, elle a une somme d'indice 1 égale à sa somme. L'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1$ est-elle stricte ?

2 - a - Montrer que pour toute suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une série $a \in \mathcal{S}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que $s_n^{(k)}(a) = \sigma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b - Comparer les ensembles $\mathcal{S}_k$ du point de vue de l'inclusion. Les inclusions obtenues sont-elles strictes ? Pour une série $a \in \mathcal{S}$ donnée, comparer entre elles les sommes d'indice k qui existent éventuellement.

3 - Montrer que la série de terme général 2^n n'appartient à aucun ensemble $\mathcal{S}_k$.

II

A partir de la suite $(s_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$, notée encore $(t_n^{(0)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$, on définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ les suites $(t_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$t_n^{(k+1)}(a) = \frac{1}{C_{k+1+n}^{n}} \sum_{p=0}^{n} C_{k+p}^{p}\, t_p^{(k)}(a)$$

où C_q^r désigne, pour des entiers $q \geqslant r \geqslant 0$, le coefficient du binôme.

Si la suite $(t_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, on dit que sa limite est la somme *d'ordre* k de la série a, et on appelle $\mathcal{C}_k$ la partie de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette hypothèse est réalisée.

1 - Comparer $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{C}_1$ ainsi que, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice 1 et d'ordre 1 d'une même série $a \in \mathcal{S}$.

.../...

2

2 - a - En utilisant la relation $C^r_{q+1} + C^{r+1}_{q+1} = C^{r+1}_{q+2}$ et l'égalité $C^0_k = C^0_{k+1}$, exprimer la somme $\sum_{p=0}^{n} C^p_{k+p}$ à l'aide d'un seul coefficient du binôme.

b - Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente à termes strictement positifs. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{\sum_{p=0}^{n} \lambda_p} \sum_{p=0}^{n} \lambda_p x_p$ converge vers ℓ.

c - Comparer les ensembles $\mathcal{C}_k$ du point de vue de l'inclusion, sans se préoccuper du caractère strict ou large des inclusions obtenues, et, pour une série $a \in \delta$ donnée, comparer entre elles les sommes d'ordre k qui existent éventuellement.

3 - On considère une série entière de coefficients $c_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ et de rayon de convergence au moins égal à 1 et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sum_{p=0}^{n} c_p$.

a - Montrer que pour tout $x_0 \in]-1, 1[$, les réels $|d_n x_0^n|$ admettent un majorant réel indépendant de n. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(d_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

b - Pour $x \in]-1, 1[$, comparer les sommes $\sum_{p=0}^{n} c_p x^p$ et $\sum_{p=0}^{n-1} d_p (x^p - x^{p+1})$ et en déduire l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n .$$

c - En désignant par c la série numérique de terme général c_n, établir pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} C^n_{k+n}\, t_n^{(k)}(c)\, x^n .$$

4 - Soit n un entier positif fixé. A partir de la série $a \in \delta$ envisagée dans les parties I et II, on définit une série $\alpha \in \delta$ de terme général $\alpha_p = a_p$ si $p \leqslant n$ et $\alpha_p = 0$ si $p > n$.

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, la somme de la série entière $\sum_{m=0}^{+\infty} C^m_{k+m}\, t_m^{(k)}(\alpha)\, x^m$ à l'aide de $\sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ et de la série de Taylor de $(1-x)^{-k-1}$, et en déduire, pour tous les entiers positifs n et k, l'égalité

$$C^n_{k+n}\, t_n^{(k)}(a) = \sum_{p=0}^{n} C^{n-p}_{k+n-p}\, a_p .$$

.../...

III

1 - En conservant les mêmes notations, on pose $T_n^{(k)}(a) = C_{k+n}^n \, t_n^{(k)}(a)$.

a - A l'aide de la relation donnant $T_n^{(k+1)}(a)$ en fonction des $T_p^{(k)}(a)$ $(p=0,\ldots,n)$, retrouver par récurrence l'égalité

$$C_{k+n}^n \, t_n^{(k)}(a) = \sum_{p=0}^{n} C_{k+n-p}^{n-p} \, a_p \ .$$

b - En déduire les égalités

$$T_n^{(k)}(a) = \sum_{p=0}^{n} C_{k+n-p-1}^{n-p} \, s_p(a) \qquad (k \geqslant 1)$$

puis

$$T_n^{(k)}(a) = \sum_{p=0}^{n} C_{k+n-p-2}^{n-p} \, (p+1) \, s_p^{(1)}(a) \qquad (k \geqslant 2) \ .$$

2 - A la série $a \in \delta$ on associe la série $F(a) \in \delta$ de terme général $b_n = s_n^{(1)}(a) - s_{n-1}^{(1)}(a)$ $(n \geqslant 1)$, avec $b_0 = s_0^{(1)}(a) = a_0$.

a - Etablir pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ l'égalité

$$T_n^{(k)}(a) = (n+k) \, T_n^{(k-1)}(F(a)) - (k-1) \, T_n^{(k)}(F(a))$$

et en déduire l'égalité

$$t_n^{(k)}(a) = k \, t_n^{(k-1)}(F(a)) - (k-1) \, t_n^{(k)}(F(a)) \ .$$

b - Etablir l'égalité

$$t_n^{(k)}(a) = (n+1) \, t_n^{(k)}(F(a)) - n \, t_{n-1}^{(k)}(F(a))$$

puis exprimer $t_n^{(k-1)}(F(a))$ par une combinaison linéaire, à coefficients indépendants de a, des $t_p^{(k)}(a)$ $(p = 0, \ldots, n)$.

3 - a - Pour $k \geqslant 1$, si $F(a) \in \mathcal{C}_{k-1}$, montrer que $a \in \mathcal{C}_k$ et comparer dans ce cas les sommes d'ordre $k-1$ de $F(a)$ et d'ordre k de a. Etudier la réciproque.

b - Comparer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les ensembles δ_k et $\mathcal{C}_k$ et, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice k et d'ordre k d'une même série $a \in \delta$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail